RİYAZİYYATIN TƏDRİSİNDƏ MÜXTƏLİF İSBATETMƏ METODLARININ TƏTBİQİ ŞAGİRDLƏRDƏ YARADICI TƏFƏKKÜRÜ İNKİŞAF ETDİRƏN MÜHÜM AMİL KİMİ

SAHİB SÜLEYMANOV
Goranboy rayonu, E.Verdiyev adına Məşədiqaralar kənd tam orta məktəbinin təlim-tərbiyə işləri üzrə direktor müavini, riyaziyyat və fizika müəllimi. E-mail: suleymanov.sahib@gmail.com
https://orcid.org/0009-0009-9009-2925

Məqaləyə istinad:
Süleymanov S. (2026). Riyaziyyatın tədrisində müxtəlif isbatetmə metodlarının tətbiqi şagirdlərdə yaradıcı təfəkkürü inkişaf etdirən mühüm amil kimi. *Azərbaycan məktəbi.* № 2 (715), səh. 97—105

DOI:
10.30546/32898065.2026.2.0175.37

ANNOTASİYA

Məqalədə ümumtəhsil məktəblərində riyaziyyatın tədrisi prosesində isbatetmə metodlarının rolundan bəhs olunur. Göstərilir ki, riyazi biliklərin yalnız faktoloji səviyyədə mənimsənilməsi kifayət deyil, təhsilalanların prosedural və konseptual biliklərinin inkişafı üçün teoremlərin isbatının öyrədilməsi vacibdir, başqa sözlə, şagird istifadə etdiyi düsturun, qaydanın və teoremin doğru olmasına əmin olmalıdır. Məqalədə üç əsas isbatetmə metodu: verilən şərtlərə əsaslanan prosedural yanaşma, əksini fərzetmə və riyazi induksiya metodları izah edilir və onların müxtəlif teoremlərin isbatında tətbiq nümunələri göstərilir. Qeyd olunur ki, bu metodların sistemli şəkildə tətbiqi şagirdlərdə məntiqi və yaradıcı təfəkkürün formalaşmasına, həmçinin riyazi anlayışların daha dərindən dərk olunmasına şərait yaradır. İsbat prosesinin öyrədilməsi şagirdlərdə riyaziyyata marağı artırır və onların mövzunu şüurlu şəkildə mənimsəməsinə kömək edir. Nəticə olaraq o qənaətə gəlinir ki, isbatetmə metodlarının düzgün seçilməsi və tətbiqi riyaziyyatın tədrisinin keyfiyyətinin yüksəldilməsində mühüm rol oynayır.

Açar sözlər: Teorem, isbatetmə metodları, əksini fərz etmə, riyazi induksiya, prosedural yanaşma, konseptual bilik, yaradıcı təfəkkür.

Məqalə tarixçəsi
Göndərilib: 18.11.2025
Qəbul edilib: 03.04.2026

THE APPLICATION OF VARIOUS PROOF METHODS IN MATHEMATICS TEACHING AS A SIGNIFICANT FACTOR IN DEVELOPING STUDENTS' CREATIVE THINKING

SAHIB SULEYMANOV
Deputy Director for Educational Affairs, Mathematics and Physics Teacher, Mashadigaralar village secondary school named after E. Verdiyev, Goranboy district. E-mail: suleymanov.sahib@gmail.com
https://orcid.org/0009-0009-9009-2925

To cite this article:
Suleymanov S. (2026). The Application of Various Proof Methods in Mathematics Teaching as a Significant Factor in Developing Students' Creative Thinking. *Azerbaijan Journal of Educational Studies.* Vol. 715, Issue II, pp. 97–105

DOI:
10.30546/32898065.2026.2.0175.37

ABSTRACT

The article provides a comprehensive analysis of the role and significance of proof methods in the teaching of mathematics at the secondary school level. It argues that the acquisition of mathematical knowledge at a purely factual level is insufficient; rather, the instruction of theorem proving is essential for the development of students' procedural and conceptual understanding. In this context, it is emphasized that students must develop confidence in the validity of the formulas, rules, and theorems they use. The study examines three principal proof methods — namely, the procedural approach based on given conditions, proof by contradiction, and mathematical induction — and demonstrates their application in proving various theorems. It is highlighted that the systematic implementation of these methods facilitates the development of students' logical reasoning and creative thinking, while also promoting a deeper understanding of mathematical concepts. Furthermore, the article underscores that teaching the process of proof enhances students' interest in mathematics and supports their active and meaningful engagement with the subject. In conclusion, it is asserted that the appropriate selection and effective application of proof methods play a crucial role in improving the quality of mathematics education.

Keywords: Theorem, methods of proof, proof by contradiction, mathematical induction, procedural approach, conceptual knowledge, creative thinking.

Article history
Received: 18.11.2025
Accepted: 03.04.2026

GİRİŞ

Elmin bütün sahələrində olduğu kimi riyaziyyatın da əsasını anlayışlar təşkil edir. Bu anlayışlar arasındakı əlaqənin mövcudluğu və xüsusiyyətləri, əlaqələr üzərində qurulan qanunauyğunluqlar və nəzəriyyələr riyaziyyat elmini formalaşdırır. Çoxlu sayda riyazi anlayışlar mahiyyət etibarilə bizdə faktoloji biliklər formalaşdırır və biz bu biliklərin sayəsində riyaziyyatı zahirən dərk edir, onun elementləri barədə məlumatlanmış oluruq. Lakin riyaziyyatı müfəssəl şəkildə mənimsəmək üçün prosedural və konseptual biliyə malik olmaq lazımdır ki, bu da həmin anlayışlar arasındakı qanunauyğunluqları, eləcə də onun doğurduğu riyazi nəzəriyyələri öyrənməklə əldə edilir.

Hər bir riyazi anlayışa digər anlayışların köməyi ilə tərif verilir. Məsələn, verilmiş üç nöqtədən və onları birləşdirən parçalardan ibarət olan fiqura üçbucaq deyilir və ya $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ şəklində olan tənliklərə kvadrat tənlik deyilir. Eləcə də hadisənin baş verməsi üçün əlverişli hallar sayının ümumi hallar sayına nisbəti hadisənin başvermə ehtimalı adlanır. Göründüyü kimi, tərif anlayışın əsas xarakteristikasını verir, onu tam şəkildə ifadə edir, lakin bu anlayışlar arasındakı qanunauyğunluqlar teoremdə öz əksini tapır. Məsələn, Bolsano-Koşi teoreminə görə, $[a; b]$ parçasında kəsilməz $f(x)$ funksiyası bu parçanın uclarında müxtəlif işarəli qiymətlər alırsa, onda parçanın daxilində elə bir c nöqtəsi vardır ki, $f(c) = 0$ olur və ya üçbucağın medianları bir daxili nöqtədə kəsişir və kəsişmə nöqtəsində təpədən başlayaraq 2:1 nisbətində bölünür. Bu təkliflərin doğruluğunu göstərmək lazımdır, çünki fikrin doğruluğu əsaslandırılmasa, ondan istifadə etmək həm kortəbii şəkildə olur, həm də çətinlik törədir.

Qeyd edək ki, teoremlər isbat tələb edən təkliflərdir, isbatsız qəbul edilən təkliflər aksiomlar adlanır. Riyaziyyatın həndəsə sahəsində teoremlər və aksiomlar digər sahələrə nisbətən daha çoxdur. Orta məktəb riyaziyyat kursunun tədrisi prosesində xeyli teoremlə rastlaşırıq, lakin əksər hallarda bu teoremlərin isbatı verilmir. Teoremlərin isbatını bilmək ona görə vacibdir ki, əvvəla, teoremin dəqiqliyinə əminlik yaranır, ikincisi, şagirdin məntiqi və yaradıcı təfəkkürü inkişaf etmiş olur, üçüncüsü, isbat zamanı prosedural gedişlər məsələ həllində tətbiq olunur, dördüncüsü isə şagirdlərdə fənnə qarşı maraq yaranır, onlar teoremin hökmünü aldıqda sevinirlər.

Teoremlər iki hissədən ibarət olur: şərt və hökm. İsbat isə verilən şərtlər daxilində hökmün alınması prosesidir. Yuxarıda göstərdiyimiz teoremlərdə $[a; b]$ parçasında kəsilməz $f(x)$ funksiyasının parçanın uclarında müxtəlif işarəli qiymətlər alması, üçbucağın daxilində kəsişən parçaların medianlar olması şərt hissələr, $[a; b]$ parçası daxilində $f(c) = 0$ şərtini ödəyən c nöqtəsinin olması, medianların kəsişmə nöqtəsi ilə təpədən başlayaraq 2:1 nisbətində bölünməsi isə hökm hissələrdir (Alıyev, 2022).

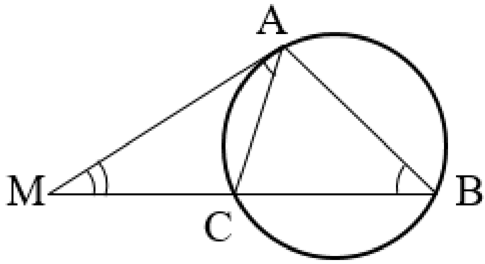
Teoremlərin isbatı müxtəlif metodlarla həyata keçirilir.

VERİLƏN ŞƏRTLƏRƏ ƏSASƏN HÖKMÜN ALINMASI

Bu isbatetmə metodunu tətbiq edərkən əvvəlki biliklərə, məlum teoremlərə, aksiomlara istinad edilir və verilən şərtlər nəzərə alınır. Başqa sözlə, fəaliyyətin icrası zamanı prosedur qaydalardan istifadə olunur.

Belə bir teoremi isbat edək: bir nöqtədən çevrəyə çəkilmiş kəsənin öz xarici hissəsi ilə hasili bu nöqtədən çevrəyə çəkilmiş toxunanın kvadratına bərabərdir. Şəkildə MA – toxunan, MB – kəsən, MC isə kəsənin xarici hissəsidir. Göstərək ki,

$MB \cdot MC = MA^2$



MAC və MAB üçbucaqlarına baxaq. M bucağı hər iki üçbucaq üçün ortaqdır, MAC və ABC bucaqları isə eyni qövslərə söykəndikləri üçün bərabərdir. Deməli, üçbucaqların oxşarlıq əlamətinə görə ΔMAC~ ΔMAB. Uyğun tərəflərin nisbətini yazaq:

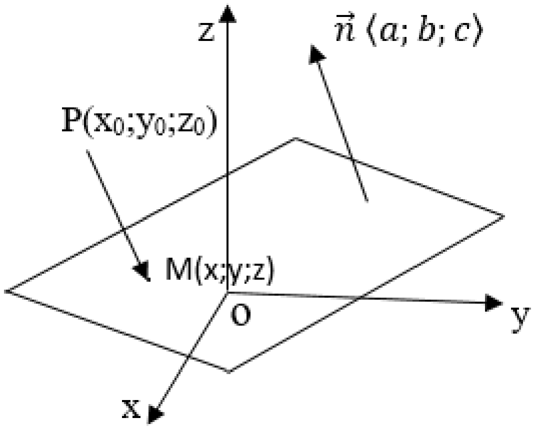
$$\frac{MB}{MA} = \frac{MA}{MC}$$

Qeyd edək ki, uyğun tərəflər olaraq bərabər bucaqların qarşısındakı tərəflər götürülür. Buradan alırıq ki, $MB \cdot MC = MA^2$ (Qəhrəmanova, Kərimov, Hüseynov, 2020).

Başqa bir misal: nöqtədən müstəviyə qədər məsafənin

$$l = \frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

düsturu ilə hesablandığını isbat edək.



Tutaq ki, P nöqtəsi və $ax + by + cz + d = 0$ müstəvisi verilib. P nöqtəsindən müstəviyə çəkilmiş perpendikulyarın oturacağı M(x; y; z) nöqtəsi olsun. $\overrightarrow{PM}$ vektorunun uzunluğu verilmiş nöqtədən verilmiş müstəviyə qədər məsafəni ifadə edəcək. Aydındır ki, $\overrightarrow{PM}$ vektorunun koordinatları $\langle x - x_0; y - y_0; z - z_0\rangle$ kimidir. $\overrightarrow{PM}$ vektoru və $\vec{n}$ normalı eyni bir müstəviyə perpendikulyar olduğundan paraleldirlər. Vektorların kollinearlıq şərtinə görə $x - x_0 = ka$, $y - y_0 = kb$, $z - z_0 = kc$ olar.

Buradan $x = x_0 + ka$, $y = y_0 + kb$, $z = z_0 + kc$ alırıq.

M nöqtəsi verilmiş müstəvi üzərində olduğundan onun tənliyini ödəməlidir:

$a(x_0 + ka) + b(y_0 + kb) + c(z_0 + kc) + d = 0$

Sadələşdirsək, $ka^2 + kb^2 + kc^2 + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ və $k = \frac{-ax_0-by_0-cz_0-d}{a^2+b^2+c^2}$ alarıq.

Eyni zamanda kollinearlığa görə $\overrightarrow{PM} = k \cdot \vec{n}$ yaza bilərik. Burada $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ olduğundan

$$\left|\overrightarrow{PM}\right| = |k| \cdot |\vec{n}| = \frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ alarıq.

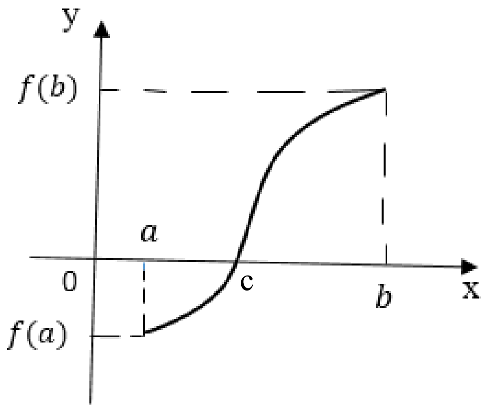
Bu düstur nöqtədən müstəviyə qədər məsafə düsturudur. Beləliklə, təklif isbat olundu (Quliyev, Abdullayeva, Abdullayeva, 2022).

Bezu teoremində deyilir ki, P(x) çoxhədlisinin (x – a) ikihədlisinə bölünməsindən alınan qalıq P(x) çoxhədlisinin x = a olduqda qiymətinə bərabərdir.

P(x) = (x – a)Q(x) + R(x) yaza bilərik. Burada Q(x) – natamam qismət, R(x) isə qalıq çoxhədlidir. Lakin R(x)-in dərəcəsi bölənin dərəcəsindən bir vahid aşağı olduğundan onun dərəcəsi sıfır olmalıdır, yəni qalıq ədəd olmalıdır. Tənlikdə x = a götürsək, P(a) = R(a) alarıq. Deməli, qalıq P(x) çoxhədlisinin x = a olduqda qiymətinə bərabərdir (Qəhrəmanova, Kərimov, Quliyev, 2018).

Bolsano-Koşi teoremini isbat edək. Göstərək ki, əgər $[a;\, b]$ parçasında kəsilməz f(x) funksiyası onun uclarında müxtəlif işarəli qiymətlər alırsa, onda bu parçanın daxilində elə bir nöqtə vardır ki, həmin nöqtədə funksiya sıfıra çevrilir. Şərtə görə, $f(a) < 0, f(b) > 0.$ $[a;\, b]$ parçasını yarıya bölək və o hissəni götürək ki, onun uclarında f(x)-in işarəsi müxtəlifdir (digər hissənin uclarında f(x)-in işarəsi eyni olacaq). Bu parçanı yenidən yarıya bölsək, hissələrdən birinin uclarında f(x)-in işarəsi müxtəlif olacaqdır. Prosesi bu qayda ilə sonsuz olaraq davam etdirək. Aydındır ki, həmişə götürdüyümüz parçanın sol ucunda f(x)-in işarəsi mənfi, sağ ucunda isə müsbət olur.

Beləliklə, bir-birinə daxil olan parçalar ardıcıllığı alırıq ki, bu parçaların da kəsişməsi boş deyil, başqa sözlə, bu parçaların kəsişməsinə daxil olan yeganə bir c nöqtəsi vardır. Bu parçaları $[a_n;\, b_n]$ kimi işarə etsək, onda $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$ olar.



Eyni zamanda $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ və f(x) kəsilməz olduğundan $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \leq 0$ və $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \geq 0$ alarıq. Deməli, $f(c) = 0$ (Fikhtengol'ts, 1968).

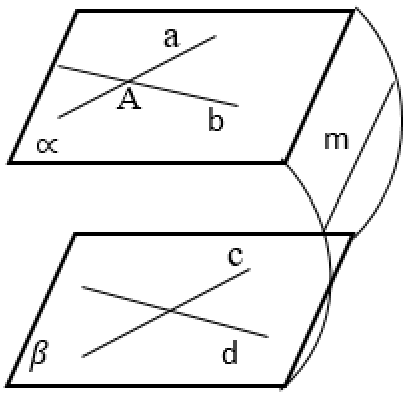
Verilən şərtlərə əsasən hökmün alınması prosedural bilik tələb edir və geniş yayılmış isbatetmə metodudur. İsbat prosesində biz artıq məlum olan teoremlərdən istifadə etməklə addım-addım nəticəyə yaxınlaşırıq. Onu da qeyd edək ki, ali məktəblərə qəbul olmaq üçün şagirdlər test imtahanları verdiklərindən onlar faktoloji biliklərə daha çox üstünlük verir və teoremlərin isbatı onlar üçün gərəksiz olur. Lakin bilmək lazımdır ki, teoremlərin isbatını bilmədikdə onu məsələ həllinə tətbiq etmək çətindir. Bəzi hallarda bu tətbiq ya kortəbii olur, ya da düzgün nəticəyə gətirmir. Ona görə də teoremin hökmünün haradan gəldiyi, hansı şərtlər daxilində ödənildiyi böyük önəm daşıyır və bunlar təfəkkürün inkişafında, məsələni düzgün dərk edərək düzgün istiqamət seçməkdə əsaslı rol oynayır. Məsələn, inteqralın nə olduğunu, nəyi ifadə etdiyini bilmədən düsturların köməyi ilə inteqralların hesablanması məntiqi və yaradıcı təfəkkürü inkişaf etdirmir, sadəcə olaraq deklarativ biliklər yaradır. Ancaq inteqralın həndəsi olaraq əyrixətli trapesiyanın sahəsini ifadə etdiyini, törəmənin tərsi olduğunu, həmçinin inteqral cəmlərin limiti kimi tapıldığını bilməklə inteqral anlayışını daha dərindən dərk etmək olur ki, bu da inteqralların hesablanmasında mühüm rol oynayır (Ağayeva, 2022).

ƏKSİNİ FƏRZETMƏ METODU

Metodlardan biri də əksini fərz etməklə isbat etmədir. Bu isbatetmə metoduna ona görə ehtiyac vardır ki, bəzi hallarda teoremin şərtindən hökmü bilavasitə almaq olmur və ya bunu çox çətinliklə əldə etmək olur. Ancaq əksini fərz etməklə isbat işi xeyli asanlaşdırır və teoremin hökmünün doğruluğunu tez yəqin edirik. Əksini fərz etməklə teoremi isbat edərkən hökmün əksini qəbul edirik və buradan da şərtə zidd olan və ya ümumiyyətlə, səhv olan nəticəyə gəlib çıxırıq. Bu da onu göstərir ki, hökmün əksi doğru deyil, yəni hökm doğrudur (Süleymanov, 2025).

Əksini fərz etməklə isbat metodundan stereometriya məsələlərində daha çox istifadə olunur. Məsələn, müstəvilərin paralellik əlamətinin isbatı əksini fərz etməklə aparılır. Əlamət belədir: bir müstəvi üzərində iki kəsişən düz xətt uyğun olaraq digər müstəvi üzərindəki iki kəsişən düz xəttə paraleldirsə, onda bu müstəvilər paraleldir.

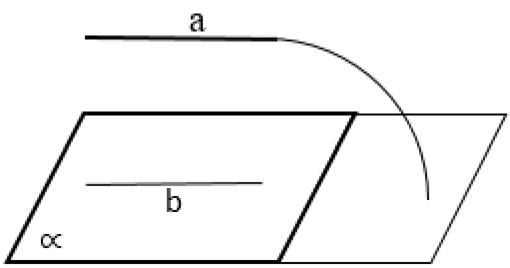
Fərz edək ki, a // c və b // d, lakin $\propto$ və β müstəviləri hər hansı m düz xətti boyunca kəsişir. Aydındır ki, şərtə görə a və b düz xətləri β müstəvisinə paralel olacaq. Bu halda, $\propto$ müstəvisi β –ya paralel olan a düz xəttindən keçib β–nı kəsdiyindən a düz xətti müstəvilərin m kəsişmə xəttinə paralel olacaqdır: a // m. Eyni qayda ilə b // m olar. Müstəvilərin m kəsişmə xətti hər iki müstəviyə aid olduğundan alırıq ki, $\propto$ müstəvisi üzərində A nöqtəsindən m düz xəttinə iki paralel düz xətt keçirilib. Bu isə paralellik aksiomuna ziddir. Deməli, $\propto$ və β müstəviləri kəsişə bilməz, yəni paraleldir.



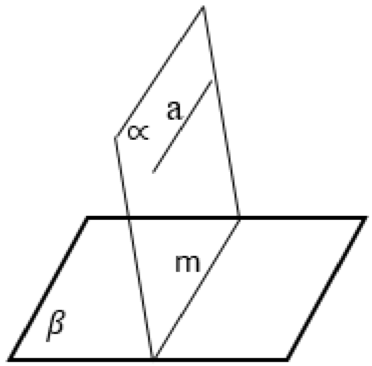
Qeyd edək ki, isbatın gedişində istifadə etdiyimiz teoremlər də əksini fərzetmə metodu ilə isbat olunur. Bu teoremlərdən biri düz xəttin müstəviyə paralellik əlamətidir; belə ki, əgər düz xətt müstəvi üzərində hər hansı düz xəttə paraleldirsə, onda müstəvinin özünə də paraleldir. İkincisi isə kəsişən müstəvilərin xassəsidir: əgər bir müstəvi digər müstəviyə paralel olan düz xətdən keçib həmin müstəvini kəsirsə, onda bu düz xətt müstəvilərin kəsişmə xəttinə paraleldir.

Düz xəttin müstəviyə paralellik əlamətini isbat edək:

Tutaq ki, a // b; isbat edək ki, a // $\propto$. Fərz edək ki, a düz xətti $\propto$ müstəvisinə paralel deyil. Onda bu düz xətt müstəvini hər hansı bir nöqtədə kəsəcək. Kəsişmə nöqtəsi b düz xəttinə aid ola da, olmaya da bilər. Birinci halda a və b düz xətləri kəsişər, ikinci halda isə çarpaz olarlar. Bu isə a və b düz xətlərinin paralellik şərtinə ziddir. Deməli, a düz xətti $\propto$ müstəvisini kəsə bilməz, yəni onlar paraleldir.



İkinci teoremi isbat edək: Tutaq ki, $\propto$ müstəvisi β müstəvisinə paralel olan a düz xəttindən keçib onu hər hansı m düz xətti boyunca kəsir. İsbat edək ki, a // m.



Fərz edək ki, a və m düz xətləri kəsişir. m düz xətti müstəvilərin kəsişmə xətti olduğundan həm də β müstəvisi üzərində olacaq və deməli, a düz xətti β müstəvisini də kəsmiş olacaqdır. Lakin şərtə görə a // β. Buradan alınır ki, a düz xətti m düz xəttini kəsə bilməz, yəni a // m.

Beləliklə görürük ki, əksini fərzetmə metodu isbat üçün nə qədər faydalı və əlverişlidir (Qəhrəmanova, Kərimov, Hüseynov, 2017).

Eləcə də limitin yeganəliyi haqqında teoremə görə [a; b] parçasında təyin olunmuş, kəsilməz f(x) funksiyasının c ∈ (a; b) olmaqla x → c olduqda limiti var və bu limit yeganədir. Limitin varlığı aşkardır, bu limitin yeganəliyini isbat edək. İsbatı əksini fərzetmə metodu ilə aparaq. Tutaq ki, x → c olduqda f(x)-in iki limiti vardır: A və B. Başqa sözlə, $\lim_{x\to c} f(x) = \text{A}$ və $\lim_{x\to c} f(x) = \text{B}$. Limitin tərifinə görə istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə

$\delta_1 > 0$ $və$ $\delta_2 > 0$ ədədləri vardır ki, $|x - c| < \delta_1$ və $|x - c| < \delta_2$ olduqda $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ və $|f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ bərabərsizlikləri ödənir. Onda yaza bilərik:

$$|A - B| = |A - B + f(x) - f(x)| \leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Bu o deməkdir ki, x → c olduqda f(x) funksiyası eyni bir limitə yaxınlaşır, yəni A = B (Fikhtengol'ts, 1968).

RİYAZİ İNDUKSİYA METODU

İsbatetmə metodlarından biri də riyazi induksiya metodudur. Bu metoddan, əsasən, cəbr sahəsində, xüsusən də müəyyən eyniliklərin və bərabərsizliklərin isbatında istifadə olunur. Ümumiyyətlə, induksiya anlayışı xüsusidən ümumiyə keçidi, yəni ümumiləşməni nəzərdə tutur. Məhz riyazi induksiya metodunun da mahiyyəti ondan ibarətdir ki, hər hansı təklifin doğruluğunu xüsusi hallarda yoxlayıb onun daha ümumi hallarda doğruluğunu göstəririk. Məsələn, aşağıdakı bərabərsizliyi riyazi induksiya metodunun köməyi ilə isbat edək:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \ (\text{n} \in \text{N}, \text{n} \geq 2)$$

Əlbəttə, bu bərabərsizliyi digər üsullarla da isbat etmək mümkündür, lakin riyazi induksiya metodu daha sadə və əlverişlidir. Əvvəlcə n = 2 üçün bərabərsizliyin doğruluğunu yoxlayaq: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} < 2 - \frac{1}{2}$ və $1\frac{1}{4} < 1\frac{1}{2}$

Deməli, n = 2 üçün bərabərsizlik doğrudur.

İndi n = k üçün bərabərsizliyin doğruluğunu qəbul edib n = k + 1 üçün doğruluğunu göstərək. Başqa sözlə, tutaq ki, $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$ bərabərsizliyi doğrudur, göstərək ki,

$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$ bərabərsizliyi də istənilən k üçün ödənilir.

Aydındır ki,

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=2-\frac{1}{k+1}(\frac{k+1}{k}-\frac{1}{k+1})=2-\frac{1}{k+1}(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})<2-\frac{1}{k+1}(1+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+1})=2-\frac{1}{k+1}$

Beləliklə, bərabərsizlik n = 2 üçün doğrudur və istənilən n = k üçün doğruluğundan n = k + 1 üçün doğruluğu alınır. Deməli, bərabərsizlik istənilən n üçün doğrudur.

Başqa bir misal: Tutaq ki, $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\cdots(1-\frac{1}{(n+1)^2})=\frac{n+2}{2(n+1)}$ eyniliyini isbat etmək tələb olunur (Riyaziyyat ensiklopediyası, 2011).

Bu eyniliyi riyazi induksiya metodu ilə asanlıqla isbat etmək olar. n = 1 olduqda

$1-\frac{1}{4}=\frac{1+2}{2(1+1)}$ alırıq ki, bu da doğru bərabərlikdir. n = k üçün eyniliyin doğruluğunu qəbul edək:

$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\cdots(1-\frac{1}{(k+1)^2})=\frac{k+2}{2(k+1)}$, n = k + 1 üçün isə eyniliyin doğru olmasını göstərək, yəni $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\cdots(1-\frac{1}{(k+1)^2})(1-\frac{1}{(k+2)^2})=\frac{k+3}{2(k+2)}$ olduğunu əsaslandıraq.

Aydındır ki, $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\cdots(1-\frac{1}{(k+1)^2})(1-\frac{1}{(k+2)^2})=\frac{k+2}{2(k+1)}\cdot(1-\frac{1}{(k+2)^2})=\frac{k+2}{2(k+1)}\cdot\frac{(k+2)^2-1}{(k+2)^2}=$

$=\frac{k+2}{2(k+1)}\cdot\frac{(k+3)(k+1)}{(k+2)^2}=\frac{k+3}{2(k+2)}$

Deməli, eynilik doğrudur (Fikhtengol'ts, 1968).

NƏTİCƏ

Riyaziyyatın tədrisi prosesində göstərdiyimiz isbatetmə metodlarını tətbiq etməklə həm şagirdlərdə məntiqi və yaradıcı təfəkkür inkişaf edir, həm də onlarda öyrəndikləri teoremlərin, qaydaların düzgünlüyünə inam hissi yaranır. Beləliklə, onlar riyaziyyatı daha dərindən sevməyə başlayırlar.

Elmi fikirlər yalnız tərif, teorem, aksiom şəklində göstərilmir, həmçinin müxtəlif səpkili fikirləri özündə cəmləşdirən hipotezlər, lemma və postulatlar da vardır. Postulatlar, adətən, fizikada aksiomları əvəz edir, məsələn, Eynşteynin nisbilik nəzəriyyəsinin postulatları və ya kvant fizikasında Bor postulatları. Lemmalar isə teoremlərin isbatı üçün köməkçi rolunu oynayır. Yuxarıda Bolsano-Koşi teoreminin isbatında istifadə etdiyimiz bir-birinə daxil olan parçaların kəsişməsinin yeganə nöqtədən ibarət olması faktı, əslində, lemmadır və onun özü də isbat olunur. Alimlər, əsasən, heç bir dəlilə söykənməyən, özlərinin şüurlarında canlandırdıqları fikirləri hipotez şəklində söyləyir və sonradan bunların bəziləri öz elmi əsasını tapır, bəziləri isə silinib gedir. Teoremlər isə isbata ehtiyacı olan təkliflərdir, elmi qanunauyğunluqlardır. Teoremlərin isbatı ümumtəhsil məktəblərində şagirdlərə mütləq öyrədilməlidir, əks halda, onlarda əzbərçilik yaranar, onlar teoremlərdən faktoloji biliklər kimi istifadə edərlər. Belə istifadə müəyyən hallarda səmərə versə də, əksər hallarda əhəmiyyətsiz olur, riyazi gedişlər aparılmır, yeni biliklər öyrənilmir. Riyazi isbat şagird zehnini, təfəkkürünü hərəkət etdirən, inkişafa aparan mühüm vasitədir.

İsbatın göstərdiyimiz formalarından hər biri əhəmiyyətlidir. Verilmiş teoremi isbat etmək üçün bu formalardan uyğun olanı seçmək vacibdir. Əslində, burada elə bir çətin məsələ yoxdur, əgər ardıcıl əməliyyatlarla teoremin hökmü alınırsa, onda əsas isbatetmə formasından istifadə etmək olar. Bəzən isə bu mümkün olmur və teoremdən hökmün əksini fərz etməklə ziddiyyətin alınacağı məlum olur. Belə hallarda əksini fərzetmə metodu olduqca səmərəlidir. Riyazi induksiya metodu əvvəlki iki metodun tətbiqi mümkün olmadıqda eyniliklərin və bərabərsizliklərin isbatında tətbiq olunur, başqa sözlə, təklifin doğruluğu $n = 1$ üçün qəbul edilir və $n = k$ üçün doğruluğundan $n = k+1$ üçün doğruluğu göstərilir.

Göstərdiyimiz hər üç isbatetmə metodu geniş tətbiqlərə malikdir. Onlardan istifadə şagirdlərdə böyük maraq doğurur və riyaziyyatı daha həvəslə öyrənməyə çalışırlar.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat

1. Ağayeva, S.A. (2022). Kurikulum. Metodika. Pedaqogika.
2. Aliyev, R.B. (2022). Riyaziyyatın ibtidai kursunun əsaslarına aid mühazirə mətnləri. Bakı.
3. Fikhtengol'ts, G.M. (1968). Osnovy matematicheskogo analiza. Moskva.
4. Qəhrəmanova, N., Kərimov, M., Hüseynov, İ. (2017). Riyaziyyat 10 Dərslik.
5. Qəhrəmanova, N., Kərimov, M., Hüseynov, İ. (2020). Riyaziyyat 9 Dərslik.
6. Qəhrəmanova, N., Kərimov, M., Quliyev, Ə. (2018). Riyaziyyat 11 Dərslik.
7. Quliyev, A.İ., Abdullayeva, M.V., Abdullayeva, C.N. (2022). Elementar riyaziyyatdan məsələ və misallar. Bakı.
8. Riyaziyyat ensiklopediyası. 2011.
9. Süleymanov, S.Q. (2020). Fizika və riyaziyyatın tədrisində qarşıya çıxan bəzi paradoksal anlayışlara yanaşma yolları. “Azərbaycan məktəbi”, №1.
10. Süleymanov, S.Q. (2024). Şagirdlərin riyazi təfəkkürünün formalaşdırılmasında müxtəlif düşünmə formalarının inkişaf etdirilməsinin rolu. “Kurikulum”, №2.